Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato II

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

Esercizio 1. Si dica, usando le opportune definizioni, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti e/o chiusi:

$\circ\mathbb{R}$ $\quad\circ\mathbb{Q}$ $\quad\circ\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad\circ\mathbb{Z}$ $\quad\circ\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ $\quad\circ A=\{1,2,3,4,5\}$

$\circ B=[1,+\infty)$ $\quad\circ C=(-1,0)\cup(1,+\infty)$ $\quad\circ D=(-3,2]\cap[1,4)$ $\quad\circ E=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2>\sqrt{2}\right\}$

Esercizio 2. Si trovino, usando le opportune definizioni, interno e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$\circ A=(0,1)$ $\quad\circ B=[0,1)$ $\quad\circ C=[7,+\infty)$ $\quad\circ D=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2\leqslant 3\right\}$

$\circ E=\{3,4,5,6,7\}$ $\quad\circ F=(0,1)\cup(\mathbb{Q}\cap(1,2))$ $\quad\circ G=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Esercizio 3. Si trovino, qualora esistano, Sup e Inf su $\mathbb{R}$ dei seguenti insiemi, specificando ove necessario se essi sono Max o Min.

$\circ A=\left\{\sqrt{1-x^2}:-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$ $\quad\circ B=\left\{\frac{xy}{x+y}:x,y\in(0,1)\right\}$

$$\circ C=\{a_n:n\in\mathbb{N}\},\quad a_n=\begin{cases} sen(log(n^4)) & \sqrt{n}\in\mathbb{N}\\ -n^2+n & n=p\quad primo\\ 2(-1)^n & altrimenti\end{cases}$$

Esercizio 4. Si provino per induzione i seguenti risultati.

- $\circ$ Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

$\circ\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$ $\quad\circ\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

Esercizio 5. Si provi che $\mathbb{R}$ è di Hausdorff (i.e. $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \exists\ U_x$ e U_y aperti di $\mathbb{R}$ t.c. $x\in U_x$, $y\in U_y$ e $U_x\cap U_y=\varnothing$).

ESERCIZIO 6. Si provi che F è chiuso $\Leftrightarrow F = \bar{F}$, dove $\bar{F}$ è la chiusura di F.

ESERCIZIO 7. Si provi la legge insiemistica di De Morgan enunciata nel modo seguente:
Sia $\{E_\alpha\}$ una collezione (finita o infinita) di insiemi E_α. Allora:

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c)$$

ESERCIZIO 8. Si trovi un intero naturale N per cui:

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < 10^{-8} \quad \forall n \geqslant N$$

ESERCIZIO 9. Si disegni sulla retta reale l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x| \leqslant 2\}$.